# Mémoire M2
# AMS - Parcours AM

# Caractérisation géométrique des singularités effaçables pour les champs bornés solutions d'EDP linéaires du premier ordre

Edgar JABER

Encadrement : Laurent MOONENS, LMO/ENS Paris

# Introduction

Ce mémoire propose des résultats et des pistes pour étudier les singularités effaçables de certaines équations aux dérivées partielles (EDP) dans le cadre de la théorie géométrique de la mesure (TGM). Plus précisément, l'ambition est d'étudier la géométrie des ensembles singuliers effaçables pour la divergence distributionnelle dans $\mathbb{R}^N$ et le rotationnel distributionnel dans $\mathbb{R}^3$ pour certaines classes de champs de vecteurs. Ces opérateurs sont éminemment géométriques et présents dans de nombreux problèmes d'EDP.
La notion d'ensemble effaçable apparaît au XIX$^{\text{ème}}$ siècle en analyse complexe. Pour une fonction $f : U \setminus E \to \mathbb{C}$ analytique bornée avec $E \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble compact et $U \supset E$ ouvert, on dit que $E$ est *effaçable* si $f$ admet une extension analytique à $U$. Paul Painlevé (1888) propose le problème de caractériser géométriquement de tels ensembles. Un premier indice est donné par le principe des singularités effaçables de Riemann, nous indiquant que les singletons sont effaçables. Painlevé généralise ce résultat en montrant qu'une condition suffisante pour l'effaçabilité d'un ensemble est que la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle soit nulle. Plus d'un siècle plus tard, le problème de Painlevé est résolu par Guy David en 1999 [1]. Ce dernier montre que pour les fonctions Lipschitziennes harmoniques du plan complexe, un ensemble $S \subseteq \mathbb{C}$ tel que $0 < \mathcal{H}^1(S) < \infty$ est effaçable si et seulement si il est purement 1 non-rectifiable. Cette caractérisation a été par la suite géneralisée aux fonctions Lipschitz harmoniques de $\mathbb{R}^N$ par Nazarov, Tolsa et Volberg en 2014 [2].
Nous pouvons définir des notions d'effaçabilité pour d'autres propriétées liés à des problèmes d'analyse réelle. En théorie des EDP, ces notions existent et sont liées à des techniques issues notamment de la théorie du potentiel. Par exemple pour $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert régulier, dans une classe de champs de vecteurs $X(\Omega)$ de fonctions solutions d'une EDP $P(x, D)u = 0$ avec $P(x, D)$ un opérateur différentiel, on dira qu'un ensemble $K \subset \Omega$ est *effaçable* si $P(x, D)u = 0$ dans $X(\Omega \setminus K)$ au sens faible ou fort, implique $P(x, D)u = 0$ dans $X(\Omega)$ au sens faible ou fort [3].
Dans notre travail, nous allons considérer la classe des champs de vecteurs $\vec{F} \in L^p(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ avec $p \in [1, +\infty]$ pour deux opérateurs linéaires du premier ordre (considérés au sens faible) $P(x, D) = P(D) = \text{div}$ et $P(x, D) = P(D) = \text{rot}$. Nous dirons que $E \subset \mathbb{R}^N$ compact est un ensemble effaçable pour $P(x, D)$ dans $L^p$ si :

$$\forall \vec{F} \in L^p(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N), \ \ \text{supp}(P(x, D)\vec{F}) \subseteq E \Rightarrow P(x, D)\vec{F} \equiv 0.$$

Ici, $P(x, D)\vec{F}$ est entendu comme une distribution et nous allons chercher à caractériser géométriquement ces ensembles. Une stratégie pour étudier l'effaçabilité est d'étudier les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation $P(x, D)\vec{F} = \mu$ (avec $\mu$ une mesure de Radon) admette une solution dans $L^p$. Suivant cette stratégie, il a été montré pour la divergence faible dans $L^\infty$ que ces ensembles sont caractérisés pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ par $\mathcal{H}^{N-1}(E) = 0$ [4][5]. Pour le cas de la divergence faible dans $L^2$, le problème reste ouvert [5]. Nous prouverons un théorème donnant une condition nécessaire et suffisante sur $\mu$, mesure signée, pour l'existence d'une

solution $L^2_{\text{loc}}$ à l'équation $\text{div}(\vec{F}) = \mu$.
Dans un deuxième temps nous allons étudier le cas du rotationnel faible pour $N = 3$. Nous émettons une conjecture sur la structure géométrique des ensembles effaçables pour les champs irrotationnels dans $L^\infty$ et construisons plusieurs exemples. Nous présentons également les obstructions rencontrées dans la fabrication d'un ensemble purement $2$ non-rectifiable effaçable dans une classe de champs réduite.
Comme perspectives éventuelles de ces travaux, il serait intéressant d'étudier l'effaçabilité pour des EDP d'évolution comprenant des rotationnels, à l'image de ce qui est fait pour les systèmes de lois de conservation dans [6].
Pendant le travail sur ce mémoire j'ai eu la chance de participer et contribuer à un groupe de travail sur la théorie des fonctions à variation bornée et autres sujets liés à la TGM. Je tiens à remercier Monsieur Moonens de m'avoir initié à ce beau sujet d'analyse et d'accepter de m'encadrer, ainsi que pour ses remarques précieuses et bienveillantes. Je tiens également à remercier Madame Lafitte pour avoir facilité les démarches à CentraleSupélec afin d'écrire ce mémoire, ainsi que pour son soutien et sa confiance.

# Table des matières

# Chapitre 1

# Panorama sur les fonctions $BV$

## 1.1 Quelques éléments d'histoire

Ces éléments sont tirés de [7]. Camille Jordan (1881) définit les fonctions à variations bornée en une variable et propose la décomposition d'une telle fonction en $f = g - h$ avec $g, h$ monotones, ceci en vue d'applications à l'étude de la convergence des séries de Fourier. C'est Leonida Tonelli ensuite (1926) qui définit les fonctions $BV$ à deux variables et les utilise en applications au calcul des variations. Caccioppoli dans les années $'30$ utilise la variation totale de Tonelli pour définir une notion de périmètre pour des ensembles dits de périmètre fini, culminant dans un papier en $1954$. Enfin, dans les années $'50$ Fichera et de Giorg intègrent le formalisme des fonctions $BV$ dans le cadre de la théorie des distributions. De Giorgi propose également une formule de Gauss-Green généralisée pour les ensembles de Caccioppoli.

## 1.2 Fonctions $BV$

Dans toute la suite on notera $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, un ouvert suffisamment régulier.

**Définition 1.2.1.** une fonction à variation bornée est une fonction $u \in L^1(\Omega)$ telle que $\forall i \in \{1, ..., N\}$ il existe une mesure de Radon $\mu_i$ vérifiant pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ :

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega \phi d\mu_i,$$

en d'autres termes, les dérivées partielles au sens des distributions de $u$ sont des mesures de Radon.

Nous pouvons également écrire cette définition sous la forme :

$$\int_\Omega u \operatorname{div}(\phi) dx = - \int_\Omega \phi \cdot d\mu, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^N), \tag{1.1}$$

avec $\mu = (\mu_1, ..., \mu_N)$ une mesure de Radon vectorielle.

*Notation* 1.2.1. Pour $u \in BV(\Omega)$ on note $Du := \mu = (\mu_1, ..., \mu_N)$ la mesure de Radon vectorielle. Ceci pour mettre l'accent que les dérivées au sens des distributions de $u$ sont des mesures.

*Remarque* 1.2.1.

- Par densité, on peut demander que la formule (1) soit vraie pour $\phi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$.
- $BV$ est non vide, en effet on a $W^{1,1}(\Omega) \subset BV(\Omega)$ et dans ce cas on a $Du = \nabla u \mathcal{L}^N$ ou $\mathcal{L}^N$ est la mesure de Lebesgue $N$-dimensionnelle. L'inclusion est stricte.
- On peut généraliser cette formule à la dimension $M \in \mathbb{N}$, on dit que $u \in BV(\Omega;\mathbb{R}^M)$ si pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega;\mathbb{R}^{N\times M})$ on a

$$\sum_{\alpha=1}^{M} \int_\Omega u^\alpha \mathrm{div}(\phi) dx = -\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \phi^\alpha dD_i u^\alpha.$$

- La variation totale d'une fonction à variation bornée est par définition la variation totale de la mesure $Du$.

**Définition 1.2.2.** *Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, on définit la variation de $u$ dans $\Omega$ par*

$$V(u,\Omega) := \sup\left\{ \int_\Omega u \ \mathrm{div}(\phi)dx, \ \ \phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega;\mathbb{R}^N), \ \ \|\phi\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Si $u$ est assez régulière, par exemple $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, alors une intégration par parties nous fournit

$$V(u,\Omega) = \int_\Omega |\nabla u| dx.$$

Pour définir les fonctions à variation bornée, nous pouvons procéder de deux façons, soit de manière classique par la variation, soit par le biais des mesures, comme expliqué précédemment. L'équivalence des deux formulations est assurée par le théorème suivant :

**Théorème 1.2.1.** *Soit $u \in L^1(\Omega)$. Alors on a*

$$u \in BV(\Omega) \Leftrightarrow V(u,\Omega) < \infty, \ \ \textit{auquel cas il vient} \ \ |Du|(\Omega) = V(u,\Omega)$$

*Démonstration.* Pour la partie directe, supposons $u \in BV(\Omega)$ ; pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega u \ \mathrm{div}(\phi)dx = -\int_\Omega \phi \cdot d\mu$$

et en prenant le supremum en $\phi$ sur la boule unité pour $\|.\|_\infty$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ on trouve bien

$$V(u,\Omega) \leq |Du|(\Omega) < \infty$$

Pour la réciproque supposons $V(u,\Omega) < \infty$, alors on a

$$\left| \int_\Omega u \ \mathrm{div}(\phi) \right| \leq V(u,\Omega)\|\phi\|_\infty, \ \ \forall \phi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega;\mathbb{R}^N).$$

Par densité de $\mathcal{C}_c^1$ dans $\mathcal{C}_0$ on peut trouver une fonctionnelle $L$ linéaire continue sur $\mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^N)$ coïncidant avec $\phi \mapsto \int_\Omega u \ \mathrm{div}(\phi)dx$ sur $\mathcal{C}_c^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et telle que $\|L\| \leq V(u,\Omega)$. Par théorème de Riesz, il existe une mesure de Radon vectorielle $\mu$ telle que l'on ait

$$\|L\| = |\mu|(\Omega) \ \ \text{et} \ \ L(\phi) = \int_\Omega \phi \cdot d\mu, \ \ \forall \phi \in \mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^N);$$

par coincidence on a donc $\forall \phi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$,

$$L(\phi) = \int_\Omega u \, \text{div}(\phi) \, dx,$$

ainsi $u \in BV(\Omega)$ et $Du = -\mu$. Il vient donc $|Du|(\Omega) = |\mu|(\Omega) = \|L\| \leq V(u, \Omega)$ et on en déduit bien $|Du|(\Omega) = V(u, \Omega)$. $\square$

On munit l'espace $BV$ de la norme $\|u\|_{BV} = \|u\|_{L^1} + |Du|(\Omega)$. Cet espace possède ainsi une structure d'espace de Banach mais cette topologie est trop forte pour de nombreuses applications. Par exemple, dans ce cadre il n'y a pas de résultat de densité rendant faciles à manipuler de telles fonctions. La solution employée consiste à utiliser la topologie de l'espace $L^1$ avec des noyaux régularisants. En utilisant ce procédé on peut déduire le théorème suivant :

**Théorème 1.2.2.** *Soit $u \in BV(\Omega)$, il existe une suite $(u_i)_i \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ telle que*

$$\lim_{i \to \infty} \|u_i - u\|_{L^1} = 0$$

*ainsi que*

$$\lim_{i \to \infty} |Du_i|(\Omega) = |Du|(\Omega)$$

La preuve de ce théorème est similaire à la preuve du théorème de Meyers-Serrin pour prouver que les espaces de Sobolev $W^{k,p}$ peuvent être définis comme la fermeture des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ pour la norme $\|.\|_{W^{k,p}}$ et on peut la trouver dans [7].
Grâce à ce résultat on en déduit le corollaire suivant pour $\Omega$ un ouvert suffisamment régulier :

**Corollaire 1.** *La boule unité fermée de $BV$ est compacte dans $L^1$.*

*Démonstration.* Soit $(u_i)_i$ suite de $\overline{B_{BV}}(0, 1)$. Par le théorème précédent, on peut trouver une suite $(v_i)_i \in \mathcal{C}^\infty \cap BV(\Omega)$ telle que

$$\forall i \quad \int |u_i - v_i| dx < \frac{1}{i}, \quad \int |\nabla v_i| < 2.$$

Donc on a $\|v_i\|_{W^{1,1}} < \infty$ et par théorème de Rellich-Kondrachov il vient $v_i \to v$ dans $L^1$ quitte à extraire et donc on obtient la propriété de semi-continuité inférieure. $\square$

### 1.2.1 Ensembles de Caccioppoli

La sous-section suivante donne le pendant géométrique de telles fonctions. Commençons par une définition.

**Définition 1.2.3.** $E \subset \mathbb{R}^N$ *est un* ensemble de Caccioppoli *(ou un* ensemble de périmètre fini*) si $\chi_E \in BV(\mathbb{R}^N)$. En d'autres termes, si on a $V(\chi_E, \mathbb{R}^N) < \infty$. Dans ce cas on note $V(\chi_E, \mathbb{R}^N) = P(E, \mathbb{R}^N)$.*

Si on suppose que $E$ est un ouvert à bord $\mathcal{C}^1$ alors par le théorème de la divergence on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} \chi_E \, \text{div}(\phi) \, dx = \int_E \text{div}(\phi) \, dx = \int_{\partial E} \phi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

en d'autres termes on en déduit que $P(E,\mathbb{R}^N) = \mathcal{H}^{N-1}(\mathbb{R}^N \cap \partial E)$ ou $\mathcal{H}^{N-1}$ est la mesure de Hausdorff $(N-1)$-dimensionnelle. Plus généralement pour $k \in [0,\infty)$ la mesure de Hausdorff $k$ dimensionnelle d'un ensemble $E$ est définie par

$$\mathcal{H}^k(E) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^k_\delta(E),$$

où pour $\delta > 0$

$$\mathcal{H}^k_\delta(E) := \frac{1}{2^k} \inf\left\{ \sum_{i\in I} [\mathrm{diam}(E_i)]^k : \ \mathrm{diam}(E_i) < \delta, \ E \subset \bigcup_{i\in I} E_i \right\}.$$

Toujours par dualité cela signifie que la fonctionnelle définie par

$$\mu_E(\phi) := \int_E \mathrm{div}(\phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{C}^1_0(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N),$$

est une mesure de Radon vectorielle.

Dans ce cas par le théorème de Radon-Nykodym, il existe $\nu_E : \mathbb{R}^N \to \mathbb{S}^{N-1}$ et $|\partial E|$ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^N$ telle que

- $\nu_E$ est $|\partial E|$-mesurable ;
- $\forall \phi \in \mathcal{C}^1_0(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi \cdot d\mu_E = \int_{\mathbb{R}^N} \phi \cdot \nu_E \, d|\partial E|.$$

Dans ces conditions, on a $|\partial E|(\mathbb{R}^N) = V(\chi_E,\mathbb{R}^N) = P(E,\mathbb{R}^N)$. Nous souhaitons alors donner un sens géométrique à $|\partial E|$ et donc à la formule de Gauss-Green :

$$\int_E \mathrm{div}(\phi) = \int \phi \cdot \nu_E d|\partial E|,$$

similairement à ce que l'on a pour un ensemble $E$ à bord régulier.

## 1.3 Rectifiabilité

On a les trois notions suivantes :

**Définition 1.3.1.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^N$ est dit $n$-*rectifiable *si il est $\mathcal{H}^n$-mesurable et que l'on a*

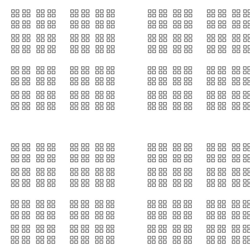
$$E \subset E_0 \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i(\mathbb{R}^n)$$

*avec $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des fonctions Lipschitziennes de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ et $E_0$ un ensemble $\mathcal{H}^n$-négligeable.*

Quelques exemples d'ensembles $n$-rectifiables sont, toute partie $\mathcal{H}^n$-négligeable, toute sous-variété $\mathcal{C}^1$ $n$-dimensionnelle de $\mathbb{R}^N$ et par exemple l'image de toute fonction lipschitzienne $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$.

**Définition 1.3.2.** *$E \subset \mathbb{R}^N$ est dit* purement $n$ non-rectifiable *si $E$ est $\mathcal{H}^n$-mesurable et si pour tout $F \in Lip(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^N)$ on a $\mathcal{H}^n(E \cap F(\mathbb{R}^n)) = 0$.*

Un exemple classique d'ensemble purement $1$ non-rectifiable du plan est l'ensemble de Cantor $4$-coins construit en gardant du carré unité seulement les $4$ coins avec un rapport bien choisi et en procédant récursivement. Nous proposons ci-dessous une illustration :



Nous allons détailler par la suite une méthode générale pour construire de tels ensembles purement $s$ non-rectifiables dans $\mathbb{R}^N$ selon une méthode exposée dans [8].

**Définition 1.3.3.** *Soit $E \subseteq \mathbb{R}^N$, $1 \leq n \leq N-1$ un entier et $x \in E$.On dit que $W$, sev de $\mathbb{R}^N$ de dimension $n$ est un $n$-*plan tangent approximatif à $E$ en $x$ *si on a*

$$\mathcal{H}^n \llcorner \left( \frac{E-x}{\lambda} \right) \rightharpoonup \mathcal{H}^n \llcorner W, \quad \lambda \to 0,$$

*on note dans ce cas*

$$W = \mathit{appTan}^n(E, x).$$

La notion de plan tangent approximatif est un équivalent géométrique au plan tangent défini pour une variété différentiable. Cette notion est intimement liée aux ensembles rectifiables comme le montre le théorème suivant :

**Théorème 1.3.1.** *Soit $E \subseteq \mathbb{R}^N$ une partie $\mathcal{H}^n$-mesurable telle que $\mathcal{H}^n \llcorner E$ qui est $\sigma$-finie. Sont équivalentes*

1. *$E$ est $n$-rectifiable.*
2. *pour $\mathcal{H}^n$-presque tout $x \in E$, alors $\mathit{appTan}^n(E, x)$ existe.*

Nous allons prouver la partie directe de ce théorème, pour cela faisons deux remarques préliminaires

— Si $E$ est $n$-rectifiable alors $E = E_0 \cup \bigsqcup_{j=1}^{+\infty} E_j$ avec $\mathcal{H}^n(E_0) = 0$ et $E_j \subseteq M_j$ où $M_j$, $j \in \mathbb{N}$ sont des sous-variétés $\mathcal{C}^1$.

— $A \subset \mathbb{R}^N$, $n$-rectifiable. Si $\mathcal{H}^n(A) < +\infty$ on a

$$\frac{\mathcal{H}^n(A \cap B_r(x))}{\omega_n r^n} \to 1, \quad r \to 0$$

*Démonstration.* On suppose $E$ $n$-rectifiable. Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^N)$ et $x \in E$. On a

$$\begin{aligned}\int_{(E-x)/\lambda} f d\mathcal{H}^n &= \int_{(E \setminus E_j - x)/\lambda} f d\mathcal{H}^n + \int_{(E_j - x)} \lambda f d\mathcal{H}^n \\ &= \int_{(E \setminus E_j - x)/\lambda} f d\mathcal{H}^n + \int_{(M_j - x)/\lambda} f d\mathcal{H}^n - \int_{((M_j \setminus E_j) - x)/\lambda} f d\mathcal{H}^n\end{aligned}$$

Puisque $M_j$ est une variété $\mathcal{C}^1$ on a donc facilement pour le deuxième terme ci-dessus :

$$\int_{(M_j-x)/\lambda} f d\mathcal{H}^n \to \int_{Tan^n(M_j,x)} f d\mathcal{H}^n, \quad \lambda \to 0$$

De même, on a pour le premier terme

$$\begin{aligned}\left|\int_{(E\setminus E_j-x)/\lambda} f d\mathcal{H}^n\right| &\leq \|f\|_\infty \mathcal{H}^n\left(\left(\frac{E\setminus E_j}{\lambda}-x\right)\cap B_R(0)\right)\\ &= \|f\|_\infty \frac{\mathcal{H}^n(B_{\lambda R}(x)\cap(E\setminus E_j))}{\lambda^n} \to 0, \quad \lambda \to 0,\end{aligned}$$

et on procède similairement pour le dernier terme. On en déduit bien la convergence faible$-*$ de $\mathcal{H}^n \llcorner \left(\frac{E-x}{\lambda}\right)$ vers $\mathcal{H}^n \llcorner appTan^n(E,x)$. Pour une preuve de la réciproque, on peut se référer à [9].

□

## 1.4 Théorème de Gauss-Green généralisé

Si $E \subset \mathbb{R}^N$ est de Caccioppoli alors on définit la frontière réduite $\partial^* E$ de $E$ par les $x \in \mathbb{R}^N$ tels que

— $|\partial E|(B(x,r)) > 0, \quad \forall r > 0$;

— $\nu_E(x) = \lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} \nu_E d|\partial E|$ existe et est unitaire.

Le théorème suivant est central dans la théorie et répond à la question posée plus tôt, à savoir caractériser géométriquement la mesure $|\partial E|$ :

**Théorème 1.4.1.** *de Giorgi (1954), Soit $E$ un ensemble de Caccioppoli. Dans ces conditions, $\partial^* E$ est $(N-1)$-rectifiable et*

$$|\partial E| = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^* E$$

*De plus, pour presque tout $x \in \partial^* E$, on a*

$$\nu_E(x) \perp appTan^{N-1}(\partial_* E, x).$$

Ainsi le théorème de Gauss-Green pour les ensembles $BV$ devient

$$\int_E \mathrm{div}(v) dx = \int_{\partial^* E} v \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1}, \quad \forall v \in \mathcal{C}^1_0(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$$

Nous donnons également une version de ce théorème pour les champs bornés :

**Théorème 1.4.2.** *Chen, Torres, Ziemer (2006) [6], Soit $\vec{F} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ avec div$(\vec{F}) = \mu$ pour $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ une mesure de Radon signée. Pour tout ensemble de Caccioppoli borné $E \subset\subset \Omega$, il existe $\mathcal{F} \cdot \nu \in L^\infty(\partial^* E)$ tel que*

$$\mu(E) = \int_{\partial^* E} \mathcal{F} \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

*De plus on a $\|\mathcal{F} \cdot \nu\|_{L^\infty(\partial^* E)} \leq \|\vec{F}\|_\infty$.*

# Chapitre 2

# Deux EDP linéaires du premier ordre

f

## 2.1 L'équation de la divergence

### 2.1.1 Définition

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un entier. Pour $\vec{F} \in L^p(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$, avec $p \in [1,\infty]$, la divergence distributionnelle de $\vec{F}$ est définie par

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{F} \colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \int_{\mathbb{R}^N} \vec{F} \cdot \nabla\varphi \, dx. \end{aligned}$$

### 2.1.2 Résultats d'effaçabilité $L^\infty$

Le résultat suivant est prouvé avec des techniques différentes d'une part par De Pauw et Moonens [4], [10] puis par Phuc et Torres [5]

**Théorème 2.1.1.** *Soit $E \subset \mathbb{R}^N$ compact, alors $E$ est effaçable pour div $\vec{F}$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ si et seulement si $\mathcal{H}^{N-1}(E) = 0$.*

L'étude de l'équation div $\vec{F} = \mu$ avec $\mu$ une mesure de Radon est la stratégie utilisée dans [5] pour prouver la non-effaçabilité des ensembles non-$\mathcal{H}^{N-1}$-négligeables. Dans un cadre plus général d'opérateur linéaire $P(x,D)$, un choix averti de mesure $\mu$ concentrée sur un sous-ensemble $E$ peut permettre de contredire l'effaçabilité lorsqu'on impose des contraintes géométriques sur $E$ (e.g mesure de Hausdorff positive, capacité $p,q$ positive). On a le théorème suivant

**Théorème 2.1.2.** *Th. 3.3 dans [5]. Soit $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N)$ alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mu(B_r(x)) \leq Cr^{N-1}, \ \forall r > 0, \ x \in \mathbb{R}^N$ avec $C$ indépendante de $x$ et $r$.*
2. *Il existe un champ $\vec{F} \in L^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ tel que div $\vec{F} = \mu$.*

*Démonstration.* Supposons $\vec{F}$ borné de divergence égale à $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et $r > 0$, par le théorème 1.4.2 on a

$$\mu(B_r(x)) = \int_{B_r(x)} d\mu = \int_{\partial B_r(x)} \mathcal{F} \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

avec $\|\mathcal{F}\cdot\nu\|_{L^\infty(\partial B_r(x))} \leq \|\vec{F}\|_{L^\infty}$. Par suite il vient

$$\mu(B_r(x)) \leq C(N)\|\vec{F}\|_{L^\infty} r^{N-1},$$

et la partie suffisante est ainsi démontrée. Pour la partie nécessaire introduisons l'espace

$$w^{1,1} := (\mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \|.\|)$$

tel que pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ on ait $\|u\| = \|\nabla u\|_{L^1}$. Introduisons également l'opérateur

$$\begin{aligned} A\colon w^{1,1} &\to L^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N) \\ u &\mapsto -\nabla u. \end{aligned}$$

Cet opérateur est isométrique par définition. En effet on a $\|Au\|_{L^1} = \|\nabla u\|_{L^1} = \|u\|_{w^{1,1}}$ et donc c'est un opérateur borné et injectif. L'adjoint $A^*$ est par suite surjectif où par définition on a

$$\begin{aligned} A^*\colon L^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N) &\to (w^{1,1})^* \\ \vec{F} &\mapsto \text{div } \vec{F} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que si $\mu$ vérifie la propriété *1* de croissance sur les boules, alors $\mu \in (w^{1,1})^*$. Nous avons besoin des deux théorèmes suivants

**Théorème 2.1.3.** *Formule de la co-aire BV, [7]. Tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ vérifie*

$$|Du| = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| dx = \int_{\mathbb{R}} |\partial\{u > t\}| dt$$

**Théorème 2.1.4.** *Boxing inequality, [11]. Soit $N > 1$, et $0 < \tau < \frac{1}{2}$. Soit $E \subset \mathbb{R}^N$ de Cacciop-poli tel que*

$$\limsup_{r\to 0} \frac{|E \cap B_r(x)|}{|B_r(x)|} > \tau, \ \forall x \in E, \tag{2.1}$$

*alors il existe $C = C(r, N) > 0$ et une famille dénombrable de boules fermées $\{\overline{B}_{r_i}(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$ $x_i \in E$ vérifiant*

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{B}_{r_i}(x_i), \ \textit{et} \ \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{N-1} \leq C|\partial E|.$$

Soit donc $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N)$ vérifiant la propriété *1* et $u \in w^{1,1}$. On a

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} u \, d\mu\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u| d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mu(\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^N : \ |u(x)| > t\}}_{:=E_t})| dt$$

Puisque $|u| \in w^{1,1} \subset BV$ est régulière, $E_t$ est bien de Caccioppoli et vérifie la propriété 2.1 du théorème 2.1.4. On peut tdonc pour tout $t \in \mathbb{R}$ associer à tout ensemble de niveau $E_t$ une famille dénombrable de boules fermées $\{\overline{B}_{r_i^t}(x_i^t)\}_{i\in\mathbb{N}}$. En utilisant la sous-additivité et la propriété de croissance sur les boules de $\mu$ on trouve que

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}^N} u \, d\mu\right| &\lesssim \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |r_i^t|^{N-1} dt \\ &\lesssim \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial E_t| \, dt \end{aligned}$$

Or puisque $u$ est régulière pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\partial^* E_t = \partial E_t$ et $\partial E_t = u^{-1}(t)$. En utilisant donc la formule de la co-aire BV on trouve enfin

$$|\langle \mu, u \rangle| \lesssim \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial E_t| \, dt = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| dx = \|u\|_{w^{1,1}}.$$

□

Grâce au théorème 2.1.2, nous pouvons prouver la partie nécessaire du théorème 2.1.1. Fixons $E \subset \mathbb{R}^N$ compact tel que $\mathcal{H}^{N-1}(E) > 0$. Nous avons besoin du lemme suivant

**Lemme 1.** *de Frostmann, [8], Pour tout borélien $E$ de $\mathbb{R}^N$ et $s > 0$ les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *$\mathcal{H}^s(E) > 0$,*
2. *il existe $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N)$ telle que $\mu(E) > 0$ et vérifiant $\mu(B(x,r)) \leq r^s$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et $r > 0$.*

Par le lemme précédent il existe alors une mesure $\sigma \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N)$ supportée dans $E$ telle que pour toute boule $B_r$ on ait

$$\sigma(B_r) \leq C r^{N-1}.$$

On peut donc appliquer le théorème 2.1.2 pour trouver un champ $\vec{F_\sigma} \in L^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ tel que div $\vec{F_\sigma} = \sigma$. Mais alors on a div $\vec{F_\sigma} = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N \setminus E)$ et div $\vec{F_\sigma} = \sigma \neq 0$ dans $\mathcal{D}'(E)$. Or par hypothèse $E$ est effaçable dans la classe des champs bornés, on aboutit donc à une contradiction.

### 2.1.3 Cas des champs $L^2$

Nous allons maintenant nous intéresser à trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation div$(\vec{F}) = \mu$ admette une solution dans la classe $L^2$ pour $\mu$ une mesure signée.
On introduit l'espace

$$w^{1,2} := \overline{\{u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) : \|\nabla u\|_{L^2} < +\infty\}}$$

où la complétion est par rapport à la norme $L^2$ du gradient. Nous noterons $w^{-1,2} := (w^{1,2})'$ son dual topologique. Les potentiels de Riesz d'ordre $\alpha \in ]0, N[$ sont par définition [12] les noyaux de convolution de l'opérateur $\mathcal{I}_\alpha \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ défini par :

$$\mathcal{I}_\alpha \varphi(x) = (-\Delta)^{-\alpha/2} \varphi = \mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{-\alpha} \widehat{\varphi}\right), \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

En d'autres termes on a

$$I_\alpha = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-\alpha}) \text{ dans } \mathcal{S}'$$

Pour $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N)$ mesure de Radon positive régulière alors on peut définir la convolution par les potentiels de Riesz par :

$$I_\alpha * \mu(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{N-\alpha}}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Dans le cas des mesures $\mu$ positives, nous avons le théorème suivant :

**Théorème 2.1.5.** *Phuc, Torres, [5] L'équation* $div(\vec{F}) = \mu$ *admet une solution* $\vec{F} \in L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ *si et seulement si*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |I_1 * \mu(x)|^2 \, dx < +\infty.$$

*On dit dans ce cas que* $\mu$ *est d'énergie 1,2-finie.*

Pour $\mu$ signée, nous allons adapter une preuve de Maz'ya et Verbitsky [13], faite pour les mesures à densité complexe. Nous prouvons le théorème suivant :

**Théorème 2.1.6.** *Soit* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ *alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1.
$$\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^2 d\mu \lesssim \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^2 dx, \quad \forall\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

2. $\exists \vec{F} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$, *tel que* $div(\vec{F}) = \mu$ *où* $\vec{F}$ *vérifie l'inégalité de trace*

$$\langle |\vec{F}|^2 \mathcal{L}^N, |\phi|^2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^2 |\vec{F}|^2 dx \lesssim \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^2 dx, \quad \forall\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Puisque $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}_c$, nous allons noter la restriction de $\mu$ à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ toujours par $\mu$. On associe à une telle mesure un opérateur de multiplication défini pour tout $\psi, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ par

$$\langle \mu\psi, \phi \rangle := \langle \mu, \psi\phi \rangle.$$

Si l'on a l'estimation

$$|\langle \mu\psi, \phi \rangle| \leq C_\psi \|\nabla\phi\|_{L^2} \|\nabla\psi\|_{L^2},$$

alors $\mu\psi \in w^{-1,2}$ et nous pouvons étendre l'opérateur de multiplication à $w^{1,2}$ tout entier. Ainsi il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \mu\colon w^{1,2} &\to w^{-1,2} \\ \psi &\mapsto \mu\psi, \end{aligned}$$

est un opérateur borné.
Dans l'inégalité ci-dessus, la plus petite constante $C$ la vérifiant correspond à $\|\mu\psi\|_{w^{-1,2}}$. Nous définissons enfin

$$\|\mu\| := \sup\left\{ \|\mu\psi\|_{w^{-1,2}}; \quad \|\nabla\psi\|_{L^2} \leq 1, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

On pose alors $\mathcal{B} := \left\{ \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N); \quad \|\mu\| < +\infty \right\}$. Par polarisation (bilinéarité en $\psi, \phi$ de $\mu\psi$), si $\mu \in \mathcal{B}$ alors la première estimation du théorème (l'inégalité de trace) est vérifiée.

Nous prouvons le théorème ci-dessus en construisant *explicitement* le champ $\vec{F}$.

**Théorème 2.1.7.** *Pour tout* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$*, on a*

$$\mu \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \exists \vec{F} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N) \ \text{ tel que } \ div(\vec{F}) = \mu \ \text{ et } \ \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^2 |\vec{F}|^2 dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^2 dx$$

*et on peut choisir* $\vec{F} = \nabla\Delta^{-1}\mu$ *pour avoir* $C = \|\mu\|$.

*Démonstration.* Pour la partie suffisante il s'agit d'une simple utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Supposons donc $\mu = \mathrm{div}(\vec{F})$ vérifiant les hypothèses, on a

$$\begin{aligned}|\langle \mu, |\phi|^2\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^2 d\mu\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} F\cdot\nabla|\phi|^2 dx\right| \\ &\leq 2\int_{\mathbb{R}^N} |\phi\vec{F}\cdot\nabla\phi| dx \\ &\leq 2\|\phi\vec{F}\|_{L^2}\|\nabla\phi\|_{L^2} \\ &\leq C\|\nabla\phi\|_{L^2}^2 = C\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\phi|^2 dx.\end{aligned}$$

Ce qui, par polarisation nous amène à conclure que $\mu \in \mathcal{B}$.
Pour prouver la partie nécessaire commençons par poser

$$\langle \vec{F}, \Phi\rangle := \langle \mu, \Delta^{-1}\mathrm{div}(\Phi)\rangle, \quad \forall\ \Phi \in \mathcal{D}^N. \tag{2.2}$$

On a en particulier pour $\phi \in \mathcal{D}$,

$$\langle \vec{F}, \nabla\phi\rangle = -\langle \mu, \phi\rangle,$$

et donc on a bien

$$\mathrm{div}(\vec{F}) = \mu \ \text{ dans } \ \mathcal{D}^{'}.$$

Il s'agit à présent de montrer que (2.1) est bien défini. Fixons donc $\Phi \in \mathcal{D}^N$, on a bien $w := \Delta^{-1}\mathrm{div}(\Phi) \in w^{1,2}\cap\mathcal{C}^\infty$ puisque l'on a $w(x) = O(|x|^{1-N})$ et $|\nabla w(x)| = O(|x|^{-N})$ pour $|x| \to \infty$ (estimations venant des potentiels de Newton $(-\Delta)^{-1}f$ pour $f$ régulière [13]).
$\vec{F}$ est donc bien fini, nous allons dans ce qui suit montrer que c'est également un champ $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ qui est équivalent à prouver l'inégalité de trace pour la mesure $|\vec{F}|^2\mathcal{L}^N$. À cette fin on utilise le théorème central suivant dû à Maz'ya :

**Théorème 2.1.8.** *Maz'ya [14], Soit $\nu$ une mesure $\sigma$-finie et positive sur $\mathbb{R}^N$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ il existe $c_1 > 0$ indépendant de $\phi$ tel que*

$$\forall\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\phi(x)|^2 d\nu(x) \leq c\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\phi(x)|^2 dx$$

2. *Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$ il existe $c_2 > 0$ tel que l'on ait*

$$\nu(K) \leq c_2 cap_{1,2}(K)$$

Où

$$\mathrm{cap}_{1,2}(K) = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 dx \ : \ u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \ \ u \geq 1 \text{ sur } K\right\},$$

est la capacité $1,2$ du compact $K$ [7].
Ainsi pour conclure la preuve du théorème $(1)$, il suffit de prouver que pour tout $K$ compact de $\mathbb{R}^N$ on a

$$\int_K |F|^2 dx \leq C\mathrm{cap}_{1,2}(K).$$

Notons pour simplifier $\text{cap}_{1,2} =: \text{cap}$. Fixons un compact $K$, qu'on suppose vérifier $\text{cap}(K) > 0$, sinon la propriété est trivialement vérifiée (car $\text{cap}(K) = 0$ implique que $|K| = 0$). On introduit le *potentiel d'équilibre* ([12],[13], [15]) sur $K$ que l'on dénote $P_K$, solution de $-\Delta P_K = \nu_K$ où $\nu_K \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N)$ est la *mesure d'équilibre* de $K$. On a les propriétés suivantes de la mesure et du potentiel :

— $\text{supp}\ \nu_K \subset K$ ;
— $P_K \sim 1, \ \ d\nu_K$-p.p ;
— $\nu_K(K) = \text{cap}(K) > 0$ ;
— $\|\nabla P_K\|_{L^2}^2 = \text{cap}(K)$ ;
— $\sup_{x\in\mathbb{R}^N} P_K(x) \leq 1$.

Le reste de la preuve consiste en des estimations des puissances $P_K^\delta$ du potentiel d'équilibre. Nous allons lister dans le courant de la preuve une série de propositions que l'on ne démontre par car celles-ci sont longues et elles se retrouvent dans [13].

Supposons que $\mu \in \mathcal{B}$, on a donc pour tout $\psi, \phi \in w^{1,2}$,

$$|\langle \mu\psi, \phi\rangle| \leq \|\mu\| \|\psi\|_{w^{1,2}} \|\phi\|_{w^{1,2}}.$$

Prenons $\Phi = (\Phi_1, ..., \Phi_N) \in \mathcal{D}^N$ et. posons

$$w = \Delta^{-1}\text{div}(\Phi) = -\mathcal{I}_2\text{div}(\Phi) = -I_2 * \text{div}(\Phi).$$

Il existe donc un champ $\vec{s}$ tel que $\text{div}(\vec{s}) = 0$ et tel que l'on ait

$$\Phi = \nabla w + \vec{s}.$$

On notera pour simplifier $P := P_K$. On pose alors pour $K$ compact de $\mathbb{R}^N$ de capacité non-nulle et $1 < 2\delta < N/(N-2)$ :

$$\psi(x) = P(x)^\delta \quad \text{et} \quad \phi(x) = \frac{w(x)}{P(x)^\delta}.$$

On a la proposition suivante :

**Proposition 1.** *Maz'ya, Verbitsky [13], Supposons $\mu \in \mathcal{B}$, tel que $\vec{F} = \nabla\Delta^{-1}\mu \in L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ est défini comme précédemment. On suppose de plus que $w = uv$ avec $u, v \in w^{1,2}$ vérifiant*

$$|u(x)| \leq C(1+|x|^2)^{-\beta/2}, \quad |v(x)| \leq C(1+|x|^2)^{-\beta/2}, \ \ x \in \mathbb{R}^N$$

*pour un certain $\beta > \frac{1}{2}(N-2)$. Alors on a $\vec{F}\cdot\nabla w \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et*

$$\langle \mu, w\rangle = -\int_{\mathbb{R}^N} \vec{F}\cdot\nabla w(x)dx.$$

Remarquons que l'on a $0 \leq P \leq 1$ sur $\mathbb{R}^N$ et que l'on a l'estimation $P(x) \leq c|x|^{2-N}$ pour $|x|$ grand. On en déduit donc $|P(x)|^\delta \leq C(1+|x|^2)^{-\delta(N-2)/2}$. Puisque $\beta = \delta(N-2) > \frac{1}{2}(N-2)$, on en déduit que $\psi$ vérifie la première condition de la proposition 1.
Sachant que l'on a $w = O(|x|^{1-N})$ et $|\nabla w| = O(|x|^{-N})$ pour $|x|$ grand, et que

$$|P(x)|^{-\delta} \leq C(1+|x|^2)^{\delta(N-2)/2},$$

par ce qui précède, on en déduit

$$|\phi(x)| \leq C(1+|x|^2)^{-\beta/2}$$

avec $\beta = -\delta(N-2) + N - 1 > \frac{1}{2}(N-2)$.

La preuve des deux lemmes suivants se trouve dans [13] :

**Lemme 2.** *Pour* $\delta > \frac{1}{2}$ *on a*

$$\|\nabla P^\delta\|_{L^2} = \frac{\delta}{\sqrt{2\delta - 1}}\sqrt{cap(K)}.$$

**Lemme 3.** *Soit* $\delta > 0$ *et* $v \in w^{1,2}$*. On a*

$$\|\nabla v\|_{L^2}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(vP^\delta)(x)|^2 \frac{dx}{P(x)^{2\delta}} \leq (\delta+1)(4\delta+1)\|\nabla v\|_{L^2}^2.$$

En combinant ces deux lemmes, on en déduit que $\psi, \phi$ définis ci-dessus sont bien dans $w^{1,2}$ et nous pouvons appliquer le résultat de la proposition 1 :

$$\langle \mu\psi, \phi \rangle = \langle \mu, w \rangle = -\int_{\mathbb{R}^N} \vec{F} \cdot \nabla w(x) dx.$$

Il s'ensuit donc que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \vec{F} \cdot \nabla w(x) dx \right| \leq \|\mu\| \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\nabla \psi\|_{L^2}. \tag{2.3}$$

En utilisant le lemme 2 ci-dessus,

$$\|\nabla \phi\|_{L^2}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\phi P^\delta)(x)|^2 \frac{dx}{P(x)^{2\delta}} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w(x)|^2 \frac{dx}{P(x)^{2\delta}} < \infty. \tag{2.4}$$

En combinant avec le résultat du lemme 1, (2.2) se réécrit comme

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \vec{F} \cdot \nabla w(x) dx \right| \leq C(\delta)\|\mu\|\sqrt{\mathrm{cap}(K)} \times \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w(x)|^2 \frac{dx}{P(x)^{2\delta}} \right)^{1/2}.$$

Enfin nous avons besoin de la dernière proposition suivante :

**Proposition 2.** *Si* $w = \Delta^{-1} div(\Phi)$ *avec* $\Phi \in \mathcal{D}^N$*, alors pour* $1 < 2\delta < N/(N-2)$ *on a*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w(x)|^2 \frac{dx}{P(x)^{2\delta}} \leq C(N,\delta) \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi(x)|^2 \frac{dx}{P(x)^{2\delta}}.$$

*Démonstration.* On commence par remarquer que $\nabla w$ et $\Phi$ sont reliées par les transformées de Riesz $R_j$, pour $j = 1, ..., N$ :

$$\nabla w = \left( \sum_{k=1}^N R_j R_k \Phi_k \right)^T_{1 \leq j \leq N}.$$

et les transformées de Riesz $R_j$ sont des opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R}^N; \rho dx)$ avec $\rho$ dans la classe de Muckenhoupt $A_2(\mathbb{R}^N)$ [12]. Il vient donc

$$\|\nabla w\|_{L^2(\rho dx)} \leq C\|\Phi\|_{L^2(\rho dx)},$$

et on montre que $\rho(x) = P(x)^{-2\delta} \in A_2(\mathbb{R}^N)$ [13]. $\square$

Ainsi en se rappelant dans (2.1) que l'on a

$$\langle \mu, w \rangle = -\langle \vec{F}, \Phi \rangle_{L^2},$$

et en appliquant la proposition précédente on obtient

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \vec{F} \cdot \Phi(x) dx \right| \leq C(n, \delta) \|\mu\| \sqrt{\text{cap}(K)} \left( \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\Phi(x)|^2}{P(x)^{2\delta}} dx \right)^{1/2},$$

pour tout $\Phi \in \mathcal{D}^N$ et par suite pour tout $\Phi \in L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.
Fixons à présent $R > 0$ suffisamment grand pour que $K \subset B(0, R)$ (on se rappelle que $K$ est compact). En choisissant $\Phi = \chi_{B(0,R)} P^{2\delta} \vec{F}$ dans l'inégalité précédente, on conclut que

$$\left( \int_{B(0,R)} |\vec{F}(x)|^2 P(x)^{2\delta} dx \right)^{1/2} \leq C(N, \delta) \|\mu\| \sqrt{\text{cap}(K)}.$$

Enfin puisque $P = 1$ sur $K$, on a par croissance de l'intégrale que

$$\int_K |\vec{F}(x)|^2 dx \leq C(N, \delta)^2 \|\mu\|^2 \text{cap}(K).$$

Ainsi le théorème 3 est vérifié pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$ et on obtient bien par équivalence l'inégalité de trace recherchée. $\square$

**Interprétation géométrique de l'inégalité de trace**

On se place maintenant dans le cas $N = 3$. Prenons $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant l'inégalité de trace 1. du théorème 2.1.6. Soit $\vec{F} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ vérifiant le deuxième point du théorème. Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ et $r > 0$ notons $B := B[x, r]$ la boule fermée de centre $x$ et rayon $r$. Par définition de $\vec{F}$, on a $\vec{F} \restriction_B \in L^2(B; \mathbb{R}^3)$. De même en notant toujours par $\vec{F}$ sa restriction à $B$, on a

$$\text{div}(\vec{F}) = \mu \llcorner B.$$

En effet cela est immédiat puisque pour $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^3)$ :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{F} \chi_B \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_B \vec{F} \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_B \varphi \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi \, d\mu \llcorner B.$$

On introduit les espaces de Sobolev suivants pour tout $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ :

$$H^1(\Omega) := \overline{\left\{ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \, dx < +\infty \right\}},$$

$$H^1_\times(\Omega; \mathbb{R}^3) := \overline{\left\{ \vec{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3), \int_\Omega |\nabla \times \vec{\psi}|^2 \, dx < +\infty \right\}},$$

où la fermeture est prise par rapport aux semi-normes $L^2$ respectivement du gradient et du rotationnel.
Puisque $\vec{F} \in L^2(B; \mathbb{R}^3)$ et $B \subset \mathbb{R}^3$ est régulier, par le théorème de Helmholtz faible, il existe $\varphi_B \in H^1(B)$ et $\vec{\psi}_B \in H^1_\times(B; \mathbb{R}^3)$ tel que

$$\vec{F} = \nabla \varphi_B + \nabla \times \vec{\psi}_B.$$

Si on passe maintenant à la divergence du champ on en déduit

$$\mathrm{div}(\vec{F}) = \Delta\varphi_B, \text{ dans } \mathcal{D}'(B).$$

Ainsi pour toute boule fermée $B \subset \mathbb{R}^3$, on trouve que notre mesure signée restreinte à $B$ correspond à

$$\mu \llcorner B = \Delta\varphi_B, \ \ \varphi_B \in H^1(B).$$

**Conjecture**

Pour finir, on énonce une conjecture pour une condition nécessaire et suffisante analogue dans un cadre $L^p$ pour $p \in ]1, +\infty[$.

**Conjecture 1.** *Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ alors les conditions suivantes sont équivalentes*

*1.*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^p d\mu \lesssim \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^p dx, \ \ \forall\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

*2.* $\exists\vec{F} \in L^p(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ *tel que* $\mu = div(\vec{F})$ *avec* $\vec{F}$ *vérifiant l'inégalité de trace*

$$\langle |\vec{F}|^{p'} \mathcal{L}^N, |\phi|^p \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^p |\vec{F}|^{p'} dx \lesssim \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^p dx, \ \ \forall\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

*où* $p' = p/(p-1)$ *est le dual de* $p$.

Pour les différentes étapes de la preuve on aurait :

— La partie suffisante se prouve aisément par une simple application de l'inégalité de Hölder.

— Pour la partie nécéssaire, on chercherait à définir $\vec{F}$ par dualité comme

$$\langle F, \Phi \rangle = \langle \mu, \Delta_p^{-1}\mathrm{div}(f(\Phi)) \rangle, \ \ \forall\Phi \in \mathcal{D}^N,$$

avec $f : x \in \mathbb{R}^N \mapsto |x|^{p-2}x \in \mathbb{R}^N$.

— Cela n'est a priori pas évident car il n'y a pas de théorie du potentiel non-linéaire pour disposer des potentiels d'équilibre du $p$-laplacien. Notons toutefois qu'il existe un analogue au théorème 2.1.8 dans le cadre $L^p$, [16] mais valable que pour les mesures *positives*.

## 2.2 L'opérateur rotationnel

### 2.2.1 Définition

Le rotationnel d'un champ de vecteurs $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ exprime la tendance qu'ont les lignes de $\vec{F}$ à tourner autour d'un point $x$.

**Définition 2.2.1.** Pour $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, le rotationnel est défini par,

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{bmatrix}.$$

Ce phénomène est physiquement identifiable à une rotation en dimension $3$ uniquement. Il existe des notions de rotationnel pour d'autres dimensions mais dans la suite on se concentre sur la dimension $3$.

### 2.2.2 Modèles d'EDP

L'opérateur rotationnel intervient dans les différents modèles physiques d'EDP :

— En mécanique des fluides, le champ de vecteurs est le champ de vitesse et le rotationnel du champ de vitesse $u \in \mathbb{R}^N$ est nommé vorticité (notée $\omega := \mathrm{rot}(u)$). L'équation d'Euler pour $N = 3$ en formulation vorticité s'écrit :

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla_x \omega = \omega \cdot \nabla_x u$$

et l'inversion de la vorticité pour retrouver le champ $u$ est faite à travers la loi de *Biot-Savart* donnée par un noyau de convolution (étant plus précisément un opérateur intégral singulier) dépendant de la dimension $N$. Pour $N = 3$ on a :

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\omega(y) \times (x - y)}{4\pi |x - y|^3} dy = K_3 * \omega(x).$$

— Les champs vortex $u^*(x) = x/|x| \in \mathbb{R}^3$. Ce sont des structures apparaissant dans des modèles de cristaux liquides ou de supraconductivité. Ils satisfont :

$$|u^*| = 1, \quad \nabla \times u^* = 0$$

et le potentiel $\phi^*$ associé est alors solution de viscosité de l'équation eikonale :

$$|\nabla \phi^*| = 1.$$

### 2.2.3 L'équation du rotationnel

Pour $\vec{F} \in L^p(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, avec $p \in [1, \infty]$, le rotationnel au sens des distributions de $\vec{F}$ est défini par

$$\begin{aligned} D \times \vec{F} \colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) &\to \mathbb{R} \\ \vec{\psi} &\mapsto \int_{\mathbb{R}^3} \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{\psi}) dx. \end{aligned}$$

$D \times \vec{F}$ est une distribution vectorielle. Si $\vec{F}$ est un champ de vecteur régulier de $\mathbb{R}^3$ (à support compact par exemple), le rotationnel au sens des distributions de $\vec{F}$ vérifie la propriété suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{\psi}) dx = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{\psi}\, dx, \quad \forall \vec{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3).$$

En effet par formule de Green on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{\psi}) dx &= \int_{\mathbb{R}^3} F_1 (\partial_2 \psi_3 - \partial_3 \psi_2) + F_2 (\partial_3 \psi_1 - \partial_1 \psi_3) + F_3 (\partial_1 \psi_2 - \partial_2 \psi_1)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} -\psi_3 \partial_2 F_1 + \psi_2 \partial_3 F_1 - \psi_1 \partial_3 F_2 + \psi_3 \partial_1 F_2 - \psi_2 \partial_1 F_3 + \psi_1 \partial_2 F_3 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) \psi_1 + (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) \psi_2 + (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) \psi_3 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{\psi}\, dx.
\end{aligned}$$

***A parté* sur les distributions vectorielles**

[15] Pour $E$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $X \subseteq \mathbb{R}^N$, l'espace

$$\mathcal{E}(X; E) = (\mathcal{C}^\infty(X; E), \{p_{m,K}; m \in \mathbb{N},\ K \subset\subset X\})$$

où $p_{m,K}(u) = \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_\infty$ est une famille de semi-normes qui engendre une topologie localement convexe métrisable. C'est donc un espace de Fréchet. Pour $K \subset\subset X$ on pose alors

$$\mathcal{D}_K(X; E) := \{u \in \mathcal{E}(X; E),\ \ \text{supp}(u) \subseteq \bar{K}\}$$

Et on définit ainsi l'espace des fonctions test comme la limite-inductive

$$\mathcal{D}(X; E) := \varinjlim_{K \subset\subset X} \mathcal{D}_K(X; E).$$

L'espace des distributions vectorielles est défini comme suit :

$$\mathcal{D}'(X; E) := \mathcal{L}_c(\mathcal{D}(X; E), \mathbb{R}) = \mathcal{D}(X, E)^{'}$$

Pour $X = E = \mathbb{R}^3$ on obtient $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ notre espace d'intérêt.

Dans la suite on va considérer des champs bornés donc pour $\vec{F} \in (L^\infty)^3$ montrons que $D \times F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, la linéarité est claire, pour $\vec{\psi} \in \mathcal{D}^3$ on a $\text{supp}(\vec{\psi}) \subset K$ pour $K$ compact assez grand de $\mathbb{R}^3$ :

$$|D \times \vec{F}(\vec{\psi})| \leq \|\vec{F}\|_\infty |K| p_{1,K}(\vec{\psi})$$

$\square$

On définit le support de $T \in \mathcal{D}^{'}(X; E)$ comme

$$\text{supp } T := X \setminus \cup \{U \in X \text{ ouvert} : \forall \varphi \in \mathcal{D}(X) / \text{ supp } \varphi \subset U \Rightarrow T(\varphi) = 0\}.$$

L'étude du support de $D \times \vec{F}$ va nous renseigner sur les ensembles de champs irrotationnels au sens faible (*i.e.* solution de $\text{rot}(\vec{F}) = 0$ au sens faible). Introduisons également les matrices :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 2.2.4 Formule de Stokes $BV$

**Lemme 4.** *Soit $\vec{F}$ champ suffisamment régulier de $\mathbb{R}^3$, et $E \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble de Caccioppoli. Alors il existe $\nu_E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{S}^2$ telle que :*

$$\int_E \nabla \times \vec{F}\, dx = \int_{\partial^* E} F \times \boldsymbol{\nu}_E \, d\mathcal{H}^2,$$

*avec $\boldsymbol{\nu}_E = (\nu_E, \nu_E, \nu_E)^T$.*

*Démonstration.* En effet on a pour $i \in \{1,2,3\}$, que $\left[\nabla \times \vec{F}\right]_i = \operatorname{div}(P_i \vec{F})$ et donc si on prend $\vec{F}$ suffisamment régulier, on a bien par le théorème de Gauss-Green généralisé (théorème 1.4.1) existence de $\nu_E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{S}^2$ telle que

$$\int_E \operatorname{div}(P_i\vec{F})dx = \int_{\partial^* E} P_i\vec{F} \cdot \nu_E d\mathcal{H}^2 = \int_{\partial^* E} \left[\vec{F} \times \boldsymbol{\nu}_E\right]_i d\mathcal{H}^2.$$

□

### 2.2.5 Effaçabilité pour le rotationnel homogène

**Conjecture 2.** *Soit $E \subset \mathbb{R}^3$ compact et 2-rectifiable, alors $E$ est effaçable pour l'équation du rotationnel homogène dans $L^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ si et seulement si $\mathcal{H}^2(E) = 0$.*

— La preuve de la partie suffisante est assez élémentaire et se base sur une stratégie similaire à la partie suffisante pour l'équation de la divergence [4].
— Notons que ce résultat est différent de celui pour l'équation de la divergence homogène [4], car on pense par exemple qu'il existe des ensembles purement 2-non-rectifiables non-triviaux qui soient effaçables pour le rotationnel comme nous le verrons par la suite avec une classe restreinte.

On rappelle que l'on dit de $E$ qu'il est effaçable pour le rotationnel distributionnel dans la classe des champs $L^\infty$ si

$$\forall \vec{F} \in L^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3),\ \text{tels que } \operatorname{supp}(D \times \vec{F}) \subseteq E \Rightarrow D \times \vec{F} \equiv 0.$$

### 2.2.6 Preuve de la partie suffisante

Afin de prouver la partie suffisante de notre conjecture, nous allons utiliser les deux lemmes suivants :

**Lemme 5.** *Soit $E \in \mathbb{R}^N$ compact tel que $\mathcal{H}^{N-1}(E) = 0$, alors il existe une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (BV(\mathbb{R}^N))^{\mathbb{N}}$ vérifiant*
— *$\psi_n \equiv 1$ sur un voisinage de $E$.*
— *$|\text{supp } \psi_n| \to 0$, pour $n \to \infty$.*
— *$V(\psi_n, \mathbb{R}^N) \to 0$ pour $n \to \infty$.*

*Démonstration.* [4] Soit $n$ un entier $> 1$. Choisissons une collection finie de cubes $(C_i^n)_{1\le i\le m}$ recouvrant $E$ et telle que pour tout $1 \le i \le m$ on ait $\operatorname{diam}(C_i^n) \le 1$ et

$$\sum_{i=1}^m \operatorname{diam}(C_i^n)^{N-1} \le \frac{1}{2N(n+1)}.$$

Posons $U_n = \bigcup_{i=1}^m C_i^n$ et $\psi_n = \chi_{U_n}$. Par le calcul on obtient

$$V(\psi_n, \mathbb{R}^N) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial U_n) \leq \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^{N-1}(\partial C_i^n),$$

et donc

$$\sum_{i=1}^m \mathcal{H}^{N-1}(\partial C_i^n) \leq 2N \sum_{i=1}^m \text{diam}(C_i^n)^{N-1} \leq \frac{1}{n-1}.$$

De même on a $|\text{supp } \psi_n| = |U_n| \to 0$ pour $n \to +\infty$, on en déduit ainsi le résultat recherché.

□

**Lemme 6.** *Soit $E \in \mathbb{R}^N$ compact tel que $\mathcal{H}^{N-1}(E) = 0$, alors il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^N))^{\mathbb{N}}$ telle que*

- *$\varphi_n \equiv 1$ sur un voisinage de $E$.*
- *$|\text{supp } \varphi_n| \to 0$, pour $n \to \infty$.*
- *$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_n| dx \to 0$ pour $n \to \infty$.*

*Démonstration.* Soit $(\psi_n) \subset BV(\mathbb{R}^N)$ la suite donnée par le lemme 1. Prenons une approximation de l'identité lisse $(\rho_\epsilon)_{\epsilon\geq 0}$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\epsilon = 1$ et $\rho_\epsilon$ est à support dans $B(0,\epsilon)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{V}_n \subseteq E$ un voisinage ouvert de $E$ maximal pour l'inclusion sur lequel on ait $\psi_n \equiv 1$. Posons alors

$$\varphi_n := \rho_\epsilon * \psi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$$

Pour $x \in \mathcal{V}_n$ on obtient

$$\varphi_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\epsilon(x-y)\psi_n(y)dy = \int_{B(0,\epsilon)} \rho_\epsilon(y)\psi_n(x-y)dy = 1$$

Si l'on choisit $\epsilon_n$ tel que $\epsilon_n < \text{diam}(\mathcal{V}_n)$, alors on a $|x-y| < \text{diam}(\mathcal{V}_n)$ et donc

$$\varphi_n(x) = \int_{B(0,\epsilon)} \rho_{\epsilon_n}(y)dy = 1$$

Donc on a bien $\varphi_n \equiv 1$ sur un voisinage de $E$.
On obtient la deuxième propriété en observant que $\text{supp } \varphi_n = \text{supp } \rho_{\epsilon_n} * \psi_n \subset \overline{\text{supp } \rho_{\epsilon_n} + \text{supp } \psi_n}$ et donc par sous-additivité de la mesure de Lebesgue on a

$$|\text{supp } \varphi_n| \lesssim \underbrace{\epsilon_n^N + |\text{supp } \psi_n|}_{\to 0,\ n\to\infty}.$$

Pour la troisième propriété, puisque $\phi_n$ est régulière alors comme vu plus tôt :

$$V(\varphi_n, \mathbb{R}^N) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_n| dx \to 0, \text{ par le Lemme } 1.$$

□

Nous sommes en mesure de prouver la partie suffisante de la conjecture.

*Démonstration.* Soit $E \subset \mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{H}^2(E) = 0$ et soient aussi $\vec{F} \in (L^\infty)^3$, $\vec{\psi} \in (\mathcal{D})^3$. On note $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'approximation de l'identité du lemme 2.

$$\langle D \times \vec{F}, \vec{\psi}\rangle = \langle D \times \vec{F}, \varphi_n\vec{\psi}\rangle + \langle D \times \vec{F}, (1-\varphi_n)\vec{\psi}\rangle$$

Comme par hypothèse $\operatorname{supp}(D \times \vec{F}) \subset E$ et $\varphi_n \equiv 1$ sur un voisinage $E$, le deuxième terme ci-dessus est nul. Pour le premier terme remarquons que nous avons la formule

$$\nabla \times (\varphi_n\vec{\psi}) = \nabla\varphi_n \times \vec{\psi} + \varphi_n\nabla \times \vec{\psi}.$$

Ainsi on en déduit par le lemme 2 :

$$\begin{aligned}
\langle D \times \vec{F}, \varphi_n\vec{\psi}\rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} \vec{F} \cdot (\nabla\varphi_n \times \vec{\psi})dx + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{F} \cdot \left(\varphi_n\nabla \times \vec{\psi}\right)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\varphi_n \cdot \vec{F} \times \vec{\psi}\, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{F} \cdot \left(\varphi_n\nabla \times \vec{\psi}\right)\, dx \\
&\leq C(\vec{F}, \vec{\psi}) \left( \underbrace{\|\nabla\varphi_n\|_{L^1}}_{\to 0} + \underbrace{|\operatorname{supp}\varphi_n|}_{\to 0} \right)
\end{aligned}$$

On en déduit donc bien que pour tout $\vec{\psi} \in \mathcal{D}^3$, $D \times \vec{F}(\vec{\psi}) = 0$ donc $D \times \vec{F} \equiv 0$. □

*Remarque* 2.2.1. Notons que $E$ dans ce cas est bien 2-rectifiable car il est 2-négligeable. En effet on a

$$E = \underbrace{\emptyset}_{2-\text{rectifiable}} \cup \underbrace{E}_{\mathcal{H}^2-\text{négligeable}}.$$

### 2.2.7 Ensembles de volume positif

Nous montrons dans un premier temps que des ensembles trop "gros" ne peuvent pas être effaçables pour le rotationnel homogène. Soit $E \subset \mathbb{R}^3$, un ensemble de Caccioppoli tel que $\mathcal{L}^3(E) > 0$. Fixons $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ et définissons le champ $\vec{F}(x) = \chi_E\nabla\varphi \in (L^\infty)^3$ avec $\chi_E$ l'indicatrice de $E$. Alors naturellement on a $\operatorname{supp}(D \times \vec{F}) \subseteq E$. Remarquons que pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3), \vec{g} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ on a

$$\operatorname{div}(f\nabla \times \vec{g}) = \nabla f \cdot \nabla \times \vec{g} + f\underbrace{\operatorname{div}(\nabla \times \vec{g})}_{=0}.$$

Prenons donc $\vec{\psi} \in \mathcal{D}^3$,

$$\begin{aligned}
\langle D \times \vec{F}, \vec{\psi}\rangle &= \int_E \nabla\varphi \cdot \nabla \times \vec{\psi} dx \\
&= \int_E \operatorname{div}(\varphi\nabla \times \vec{\psi})dx \\
&= \int_{\partial^* E} \varphi\nabla \times \vec{\psi} \cdot \nu_E\, d\mathcal{H}^2 \neq 0, \text{ si } \nabla \times \vec{\psi} \notin (\nu_E)^\perp
\end{aligned}$$

Ainsi un tel ensemble $E$ ne serait pas effaçable pour le rotationnel.

### 2.2.8 Ensembles $2$-rectifiables de mesure positive

Nous allons amenuiser à présent notre ensemble en prenant un exemple simplifié d'ensemble $2$-rectifiable dans $\mathbb{R}^3$ à savoir $E = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Ce dernier est de mesure $\mathcal{H}^2$ positive et nous montrerons par un contre-exemple que cet ensemble n'est encore pas effaçable pour le rotationnel homogène. Cela consolidera notre conjecture. Prenons $u, v \in$ Lip$(\mathbb{R}^3)$ et considérons le champ de vecteurs suivant :

$$\vec{F}(x) = \begin{cases} \nabla u(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^2 \times ]0, +\infty[ \\ \nabla v(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^2 \times ]-\infty, 0[ \end{cases} \in L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3).$$

Alors pour tout $\vec{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} \langle D \times F, \vec{\psi} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2 \times ]0,+\infty[} \nabla u \cdot \nabla \times \vec{\psi}\, dx + \int_{\mathbb{R}^2 \times ]-\infty,0[} \nabla v \cdot \nabla \times \vec{\psi}\, dx \\ &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \cdot \nabla \times \vec{\psi}\, dx}_{=0} + \int_{\mathbb{R}^2 \times ]-\infty,0[} \nabla(v-u) \cdot \nabla \times \vec{\psi}\, dx. \end{aligned}$$

En notant pour la suite $\mathbb{R}^3_- := \mathbb{R}^2 \times ]-\infty, 0[$, il vient

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^3_-} \partial_1(v-u)\left[\partial_2\psi_3 - \partial_3\psi_2\right] + \partial_2(v-u)\left[\partial_3\psi_1 - \partial_1\psi_3\right] + \partial_3(v-u)\left[\partial_1\psi_2 - \partial_2\psi_1\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^3_-} \partial_1\left[(v-u)(\partial_2\psi_3 - \partial_3\psi_2)\right] - (v-u)\partial_1\left(\partial_2\psi_3 - \partial_3\psi_2\right) \\ &\quad + \partial_2\left[(v-u)(\partial_3\psi_1 - \partial_1\psi_3)\right] - (v-u)\partial_2\left(\partial_3\psi_1 - \partial_1\psi_3\right) \\ &\quad + \partial_3\left[(v-u)(\partial_1\psi_2 - \partial_2\psi_1)\right] - (v-u)\partial_3\left(\partial_1\psi_2 - \partial_2\psi_1\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3_-} \partial_3\left[(v-u)(\partial_1\psi_2 - \partial_2\psi_1)\right] - \underbrace{(v-u)\text{div}(\nabla \times \vec{\psi})}_{=0}. \end{aligned}$$

où les premiers termes sont nuls par théorème fondamental de l'analyse et régularité de $\vec{\psi}$. Après intégration nous obtenons :

$$\langle D \times \vec{F}, \vec{\psi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (v-u)(x_1, x_2, 0)(\partial_1\psi_2 - \partial_2\psi_1)\, dx_2 dx_1.$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned} \langle D \times \vec{F}, \vec{\psi} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \partial_1\left[(v-u)\psi_2\right] - \left[\partial_1(v-u)\right]\psi_2 - \partial_2\left[(v-u)\psi_1\right] + \left[\partial_2(v-u)\right]\psi_1\, dx_2 dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[\partial_2(v-u)\right]\psi_1 - \left[\partial_1(v-u)\right]\psi_2\, dx_2 dx_1 \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[\nabla(v-u) \times \vec{\psi}\right]_3 dx_2 dx_1 \\ &= -\int_E \left[\nabla(v-u) \times \vec{\psi}\right]_3 d\mathcal{H}^2, \end{aligned}$$

et on en déduit que si $\nabla u$ et $\nabla v$ sont différents sur une partie de $E$ de mesure $> 0$, alors $D \times F$ n'est pas la distribution nulle — et l'ensemble n'est donc pas effaçable. $\square$

*Remarque* 2.2.2.
- On remarque dans ce cas particulier que le rotationnel au sens des distributions $D \times \vec{F}$ est une mesure de Radon vectorielle.
- Si on prend simplement $\vec{F} = \nabla g$ avec $g \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^3)$ alors par la réciproque du théorème de Poincaré on a $D \times \vec{F} \equiv 0$ partout.
- Une piste de travail consiste maintenant à exploiter cette idée pour généraliser la preuve de la non-effaçabilité aux parties 2-rectifiables générales.

### 2.2.9 L'espace $BR$

**Définition 2.2.2.** L'espace $BR$ est défini comme l'ensemble des champs $\vec{F} \in (L^1)^3$ tels que les composantes du rotationnel distributionnel soient des mesures :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\},\ \exists\, \mu_i \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^3),\ \left[D \times \vec{F}\right]_i = \mu_i.$$

*Remarque* 2.2.3. On a $BV^3 \subset BR$. En effet par hypothèse si $\vec{F} \in BV^3$, il existe $\vec{\mu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^3\mathbb{R}^3)$ tel que $D\vec{F} = -\vec{\mu} = -(\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T$. On obtient bien $\vec{F} \in BR$ avec

$$D \times \vec{F} = \vec{\nu} = (\mu_2 - \mu_3, \mu_3 - \mu_1, \mu_1 - \mu_2)^T.$$

De même puisque $(L^\infty)^3 \cap BV^3 \neq \emptyset$ on en déduit que $(L^\infty)^3 \cap BR \neq \emptyset$ et nous allons maintenant nous intéresser à cet espace.

### 2.2.10 Effaçabilité des ensembles purement $2$ non-rectifiables dans la classe $(L^\infty)^3 \cap BR$

Nous allons maintenant essayer de construire un exemple d'ensemble suffisamment mince, à savoir purement 2 non-rectifiable dans $\mathbb{R}^3$ qui soit effaçable pour le rotationnel pour les champs bornés de rotationnel mesure. Pour cela on utilise une démarche expliquée dans [8] pour construire des ensembles de Cantor dans $\mathbb{R}^N$ de dimension de Hausdorff $s$ arbitraire. On démarre par la boule unité $B_1$ fermée de $\mathbb{R}^3$ et choisissons $4$ boules de rayon $r_1$ à l'intérieur de $B_1$ telles que :

$$4 \times \mathrm{diam}(B_{r_1})^2 = (\mathrm{diam}(B_1))^2 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

A la $k$-ème étape de la construction on a :

$$B_k = \bigcup_{i=1}^{4^k} B_{k,i},$$

avec pour tout $i \in \{1, ..., 4^k\}$,

$$r(B_{k,i}) = r_k = \frac{1}{2(\sqrt{2})^k}.$$

On pose finalement :

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Nous avons [8] :

$$0 < \mathcal{H}^2(C) < \infty$$

et l'ensemble est bien purement 2 non-rectifiable. Soit $\vec{F} \in (L^\infty)^3 \cap BR$ tel que l'on ait supp$(D \times \vec{F}) \subseteq C$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on considère les fonctions $\chi_k \in \text{Lip}(\mathbb{R}^3)$ définies par

$$\chi_k(x) = \min(1, k \text{ dist}_2(x, (\widetilde{B}_k)^c)),$$

où $\text{dist}_2(x, (\widetilde{B}_k)^c) = \|x - p_k(x)\|_2 = |r_k - \|x - x_k\||$ avec $x_k$ le centre de $B_k$ et où $\widetilde{B}_k$ est un épaississement de la boule $B_k$ par $1/k$ avec $p_k(x)$ la projection orthogonale de $x$ sur $\partial B_k$ pour la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^3$. Remarquons en particulier que l'on a $\chi_k \equiv 1$ sur $B_k$ et $\chi_k \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \widetilde{B}_k$. On convole celle-ci par une approximation de l'identité $(\rho_\epsilon)_{\epsilon>0}$ régulière pour obtenir $\chi_{k_j} := \chi_k * \rho_{\epsilon_{k_j}}$ lisse à support dans $B_k$. Soit $\vec{\psi} \in \mathcal{D}^3$, on a

$$\begin{aligned}
\langle D \times \vec{F}, \vec{\psi} \rangle &= \langle D \times \vec{F}, \chi_{k_j} \vec{\psi} \rangle + \langle D \times \vec{F}, (1 - \chi_{k_j}) \vec{\psi} \rangle \\
&= \langle \vec{F}, \nabla \times (\chi_{k_j} \vec{\psi}) \rangle + 0 \\
&= \langle \vec{F}, \chi_{k_j} \nabla \times \vec{\psi} \rangle + \langle \vec{F}, \nabla \chi_{k_j} \times \vec{\psi} \rangle.
\end{aligned}$$

le premier terme ci-dessus tend vers 0 par convergence dominée et une extraction diagonale puisque la mesure de Lebesgue de $C$. Pour le deuxième terme on utilise la réecriture :

$$\langle \vec{F}, \nabla \chi_{k_j} \times \vec{\psi} \rangle = \langle \nabla \chi_{k_j}, \vec{F} \times \vec{\psi} \rangle.$$

On développe ensuite

$$\begin{aligned}
\langle \nabla \chi_{k_j}, \vec{F} \times \vec{\psi} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \chi_{k_j} \cdot \vec{F} \times \vec{\psi} dx \\
&= -\langle \text{div}(\vec{F} \times \vec{\psi}), \chi_{k_j} \rangle
\end{aligned}$$

A ce point, afin d'utiliser la formule de Green 1.4.2, nous devons montrer que $\vec{F} \times \vec{\psi}$ est un champ à divergence mesure. Pour cela, montrons qu'on a bien une fonctionnelle continue sur $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^3)$ muni de la norme $\| \,.\, \|_\infty$. Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^1$, il vient

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^3} \text{div}(\vec{F} \times \vec{\psi}) \phi \, dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} \vec{F} \times \vec{\psi} \cdot \nabla \phi \, dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^3} \vec{F} \cdot (\vec{\psi} \times \nabla \phi) \, dx \right| \\
&\leq \left| \int_{\mathbb{R}^3} \vec{F} \cdot \nabla \times (\phi \vec{\psi}) \, dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^3} \vec{F} \cdot \phi \nabla \times \vec{\psi} \, dx \right| \\
&\leq C \left( |D \times \vec{F}|, \|\nabla \times \vec{\psi}\|_\infty \right) \|\phi\|_\infty
\end{aligned}$$

On peut donc appliquer le théorème de représentation de Riesz afin de trouver $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\text{div}(\vec{F} \times \vec{\psi}) = \mu$. Nous pouvons développer :

$$\langle \nabla \chi_{k_j}, \vec{F} \times \vec{\psi} \rangle = -\int_{\widetilde{B}_k \setminus B_k} k \|x - p_k(x)\|_2 * \rho_{\epsilon_{k_j}} \, d\mu - \int_{B_k} 1 * \rho_{\epsilon_{k_j}} \, d\mu.$$

En passant à la limite en $j$ dans le deuxième terme ci-dessus par mesurabilité de $(1 * \rho_{\epsilon_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$, on a

$$\int_{B_k} 1 * \rho_{\epsilon_{k_j}} \, d\mu \to \mu(B_k), \ j \to \infty.$$

Nous utilisons la deuxième caractérisation du théorème 1.4.2 selon laquelle il existe une fonction $\mathcal{F}\cdot\nu \in L^\infty(\partial B_k)$ telle que $\|\mathcal{F}\cdot\nu\|_{L^\infty(\partial B_k)} \leq \|\vec{F}\times\vec{\psi}\|_\infty$ vérifiant :

$$\mu(B_k) = \int_{\partial B_k} \mathcal{F}\cdot\nu \, d\mathcal{H}^2.$$

On obtient donc par majoration :

$$|\mu(B_k)| \leq \|\vec{F}\times\vec{\psi}\|_\infty \mathcal{H}^2(\partial B_k).$$

On étudie à présent le premier terme. On peut donc écrire :

$$\langle \text{div}(\vec{F}\times\vec{\psi}), k \text{ dist}_2(x, \partial\widetilde{B}_k) * \rho_{\epsilon_{k_j}} \rangle = k \int_{\widetilde{B}_k \backslash B_k} \nabla \left( \text{dist}_2(x, \partial\widetilde{B}_k) * \rho_{\epsilon_{k_j}} \right) \cdot \vec{F}\times\vec{\psi} \, dx$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en majorant

$$\left| \int_{\widetilde{B}_k \backslash B_k} \nabla \left( \text{dist}_2(x, \partial\widetilde{B}_k) * \rho_{\epsilon_{k_j}} \right) \cdot \vec{F}\times\vec{\psi} \, dx \right| \leq k \text{Vol}(\widetilde{B}_k \backslash B_k)^{1/2} \|\nabla \text{ dist}(., \partial\widetilde{B}_k)\|_\infty \|\vec{F}\times\vec{\psi}\|_{L^2}$$

On a bien $\|\vec{F}\times\vec{\psi}\|_{L^2} < +\infty$ puisque $\vec{\psi}$ est lisse et à support compact et $\|\nabla \text{ dist}(., \partial\widetilde{B}_k)\|_\infty \leq 1$ p.p puisque la fonction distance est 1-lipschitzienne.
On peut à présent tout rassembler et estimer notre quantité d'intérêt :

$$\left| \langle \nabla\chi_k, \vec{F}\times\vec{\psi} \rangle \right| \leq C(\vec{F}, \vec{\psi}, \nu) \left( k \text{Vol}(\widetilde{B}_k \setminus B_k)^{1/2} + \mathcal{H}^2(\partial B_k) \right).$$

A ce moment de la preuve on s'aperçoit que l'on ne peut pas estimer directement la mesure $\mathcal{H}^2(\partial B_k)$ par une quantité tendant vers $0$. En effet on a

$$\mathcal{H}^2(\partial B_k) = 4^k \left( 4\pi \left( \frac{1}{2(\sqrt{2})^k} \right)^2 \right) = \pi.$$

Une idée à ce stade serait d'aplatir la géométrie petit à petit de sorte que $4^k \text{diam}(B_{k,i})^2$ puisse rester constant tandis que $\mathcal{H}^2(\partial B_{k,i})$ soit de l'ordre $4^k 2 r_k \epsilon_k$ avec $B_{k,i}$ un ellipsoïde de grand axe $r_k$ et de petits axes $\epsilon_k$ et $\epsilon_k$. Cet aplatissement devrait s'effectuer tout en gardant la dimension de Hausdorff de l'ensemble égale à 2.

# Conclusion et perspectives

Nous avons réussi à proposer une piste pour fabriquer des ensembles 2-purement non-rectifiables effaçables pour le rotationnel. Notons que ces ensembles sont de mesure $\mathcal{H}^2$ positive ce qui les rend donc non-effaçable pour la divergence. La structure géométrique des effaçables pour ces deux opérateurs différentiels est donc bien *différente*. Pour traiter la partie nécessaire de la conjecture, nous avons essayé d'étudier l'équation rot $\vec{F} = \vec{\mu}$ pour $\vec{\mu}$ une mesure de Radon vectorielle, en assimilant des méthodes similaires à ce qui a été fait pour div $\vec{F} = \mu$ [5] toutefois les méthodes ne sont pas directement applicables. Une autre piste de perspective serait d'essayer de généraliser notre deuxième contre-exemple pour prouver la non-effaçabilité des ensembles 2-rectifiables de mesure $\mathcal{H}^2$ non-nulle généraux. L'étude pourrait se poursuivre en étudiant des EDP avec plus de structure, en donnant éventuellement une dépendance temporelle au champ $\vec{F}$ à l'image de ce qui est fait pour les systèmes de lois de conservation [6]. Un autre angle d'étude serait d'essayer de généraliser la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un champ à divergence mesure signée dans la classe des champs $L^p$ et d'essayer d'en donner des caractérisations géométriques.

# Bibliographie


[1] G. David, “Unrectifiable 1-sets have vanishing analytic capacity”, *Revista Matemática Iberoamericana, Vol.14, no.2, 369-479*, 1998.

[2] F. Nazarov., X. Tolsa et A. Volberg, “The Riesz transform, rectifiability, and removability for Lipschitz harmonic functions”, *Publ. Mat. 58, 517-532*, 2014.

[3] R. Harvey et J. Polking, “Removable singularities of solutions of linear partial differential equations”, *Acta Math. 125, 39-56*, 1970.

[4] L. Moonens, “Removable singularities for the equation div $v = 0$”, *Real Analysis Exchange, Summer Symposium*, p. 1-9, 2006.

[5] N. C. Phuc et M. Torres, “Characterizations of the existence and removable singularities of divergence-measure vector fields”, *Indiana University Mathematics Journal*, t. 57, p. 1573-1598, 2008.

[6] W. P. Ziemer, M. Torres et G.-Q. Chen, “Measure-Theoretic Analysis and Nonlinear Conservation Laws”, *Pure and Applied Mathematics Quarterly, Vol.3, N.3, 841-879*, 2007.

[7] W. P. Ziemer, *Weakly Differentiable Functions : Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation*, sér. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1989.

[8] P. Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces : Fractals and Rectifiability*, sér. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1995.

[9] L. Simon, *Lectures on geometric measure theory*. Proc. Centre Math. Analysis, 1983.

[10] T. de Pauw, “On the exceptional sets of the flux of a bounded vectorfield.”, *J. Math. Pures Appl., 82*, 2003.

[11] W. Gustin, “Boxing inequalities”, *J. Math. Mech. 9, 229–239*, 1960.

[12] D. R. Adams et L. I. Hedberg., *Function Spaces and Potential Theory*, sér. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1999.

[13] V. G. Maz’ya et I. E. Verbitsky, “The Schrödinger operator on the energy space : boundedness and compactness criteria”, *Acta Mathematica, 188, 263-302*, 2002.

[14] V. G. Maz’ya, “On the theory of $n$-dimensional Schrödinger operator.”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 28, 1145-1172 (En russe)*, 1964.

[15] H. Federer, *Geometric measure theory*. Springer-Verlag, 1969.

[16] I. E. Verbitsky, “Nonlinear potentials and trace inequalities”, *The Maz’ya Anniversary Collection, Vol.2 (Rostock, 1998), 323-343, Oper. Theory Adv. Appl., 110, Birkhaüser, Basel*, 1999.